Optische & Akoestische Golven: Afleidingen

Stijn Van Caekenberghe

August 14, 2009

In dit document staan bewijzen die gevraagd kunnen worden op het examen. Een geschikt boek voor wanneer je er nog niet aan uit kunt, is *The Physics of Vibrations and Waves* door *H. J. Pain*, waar de prof ook naar verwees.

1 Het gedrag van geluid bij een grensoppervlak

Bij een grensoppervlak tussen twee materialen met verschillende akoestische restiviteit (impedantie), moeten twee continuïteitsvoorwaarden voldaan zijn.

- De normale componenten van de `deeltjessnelheid` boven en onder het scheidingsoppervlak moeten gelijk zijn:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \frac{\partial z_r}{\partial t} = \frac{\partial z_t}{\partial t} \tag{1}$$

  Merk op dat de formule voor z_i, z_i en z_i in functie staat van x, de normale.

$$z_i = A \sin \omega(t - \frac{x}{v_1}),\ z_r = A_1 \sin \omega(t - \frac{x}{v_1}),\ z_t = A_2 \sin \omega(t - \frac{x}{v_2})$$

- De `geluidswisseldruk` moet aan beide zijden gelijke waarde hebben.

$$\Delta p_i + \Delta p_r = \Delta p_t \tag{2}$$

Vergelijking (2) kan worden herschreven met de volgende formules:

$$\Delta p_i = \rho_1 v_1 \frac{\partial z_i}{\partial t},\ \Delta p_r = -\rho_1 v_1 \frac{\partial z_r}{\partial t},\ \Delta p_t = \rho_2 v_2 \frac{\partial z_t}{\partial t}$$

Dit wordt:

$$\rho_1 v_1 (\frac{\partial z_i}{\partial t} - \frac{\partial z_r}{\partial t}) = \rho_2 v_2 \frac{\partial z_t}{\partial t} \tag{3}$$

Met de akoestische resistiviteit:

$$R_1 = \rho_1 v_1,\ R_2 = \rho_2 v_2$$

en de deeltjessnelheid:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \omega z_i,\ \frac{\partial z_r}{\partial t} = \omega z_r,\ \frac{\partial z_t}{\partial t} = \omega z_t$$

De verhouding van de deeltjessnelheden wordt dan:

$$\frac{\frac{\partial z_r}{\partial t}}{\frac{\partial z_i}{\partial t}} = \frac{\omega z_r}{\omega z_i} = \frac{z_r}{z_i} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \tag{4}$$

De verhouding van de intensiteiten I is hiermee verwant:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{Z_r(\frac{\partial z_r}{\partial t})^2_{rms}}{Z_r(\frac{\partial z_i}{\partial t})^2_{rms}} = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2} \tag{5}$$

Op dezelfde wijze (of gewoon met behulp van behoud van energie) vind je

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{R_2(2R_1)^2}{R_1(R_1 + R_2)^2} \tag{6}$$

2 Elektromagnetische golven bij grensoppervlakken

Eerst bekijken we de normale inval. Hier zijn weer twee continuïteitsvoorwaarden:

- $E_i + E_r = E_t$
- $H_i + H_r = H_t$

Met de intrinsieke impedantie Z (Zie EMG van prof Van de Capelle):

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \frac{E_i}{H_i} = -\frac{E_r}{H_r},\ Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \frac{E_t}{H_t}$$

De reflectiecoëfficiënt en transmissiecoëfficiënt worden (vergelijk met (4)):

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},\ T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \tag{7}$$

Nu de schuine inval (invallende hoek θ, brekingshoek ϕ). Er zijn twee gevallen:

1. H staat loodrecht op het vlak (dus H_i,H_r,H_t). De tangentiële componenten van E zijn dan $E_i \cos\theta$, $E_r \cos\theta$, $E_t \cos\phi$.
2. E staat loodrecht op het vlak (dus E_i,E_r,E_t). De tangentiële componenten van H zijn dan $H_i \cos\theta$, $H_r \cos\theta$, $H_t \cos\phi$

Voor het eerste geval wordt dit bijvoorbeeld voor de reflectiecoëfficieënt:

$$\frac{E_r \cos\theta}{E_i \cos\theta} = \frac{E_t \cos\phi / H_t - E_i \cos\theta / H_i}{E_t \cos\phi / H_t + E_i \cos\theta / H_i}$$

Dit geeft met de intrinsieke impedantie:

$$R_\parallel = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 \cos\phi - Z_1 \cos\theta}{Z_2 \cos\phi + Z_1 \cos\theta} \tag{8}$$

$$T_\parallel = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 Z_2 \cos\theta}{Z_2 \cos\phi + Z_1 \cos\theta} \tag{9}$$

Voor het tweede geval:

$$R_\perp = \frac{Z_2 \cos\theta - Z_1 \cos\phi}{Z_2 \cos\theta + Z_1 \cos\phi} \tag{10}$$

$$T_\perp = \frac{2 Z_2 \cos\theta}{Z_2 \cos\theta + Z_1 \cos\phi} \tag{11}$$

De verhouding van de twee intrinsieke impedanties kunnen we herschrijven (met $\mu_1 \approx \mu_2$, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ en $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r}$):

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta}{\sin\phi}$$

Hiermee wordt (8), (9), (10) en (11):

$$R_\parallel = \frac{\tan(\phi - \theta)}{\tan(\phi + \theta)} \tag{12}$$

$$T_\parallel = \frac{4 \sin\phi \cos\theta}{\sin(2\phi) + \sin(2\theta)} \tag{13}$$

$$R_\perp = \frac{\sin(\phi - \theta)}{\sin(\phi + \theta)} \tag{14}$$

$$T_\perp = \frac{2 \sin\phi \cos\theta}{\sin(\phi + \theta)} \tag{15}$$

Extra: Wanneer θ zeer klein is, nadert de inval de normale. We kunnen dan vereenvoudigen: $\theta \to 0 \Rightarrow \phi \to 0$: $\sin(\phi - \theta) \sim \tan(\phi - \theta) \sim (\phi - \theta)$:

$$R_\parallel \sim R_\perp \sim \frac{\phi - \theta}{\phi + \theta} \sim \frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}}{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{16}$$